

Bacalaureat 2000

Profil: matematica-fizica

Sesiunea august 2000

I. (30 puncte)

1. Fie functia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 6x + 9 + m$, unde m este un parametru real.
 - a) (4 p.) Sa se determine valorile lui m pentru care $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$;
 - b) (4 p.) Sa se determine punctul de minim si minimul functiei f ;
 - c) (4 p.) Pentru $m=0$, sa se determine valorile reale ale lui x pentru care $(f \circ f)(x) = 0$.
2. (4 p.) Fie polinomul $f = X^3 + X + 1$. Sa se determine catul si restul impartirii lui f la $X + 2$.
3. Se considera sirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ si $(b_n)_{n \geq 1}$ unde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = 9^n$.
 - a) (4 p.) Sa se arate ca sirurile date sunt progresii geometrice si sa se determine ratia fiecareia;
 - b) (5 p.) In sistemul de coordonate xOy se considera punctele $A_n(\log_2 a_n, \log_3 b_n), n \geq 1$. Sa se scrie ecuatia dreptei care trece prin punctele A_1 si A_2 ;
 - c) (5 p.) Sa se demonstreze ca punctele $A_n(\log_2 a_n, \log_3 b_n)$ sunt situate pe dreapta $A_1 A_2, \forall n \geq 1$.

II. (20 puncte)

1. Pe multimea numerelor reale definim legea $x * y = -xy + 5x + 5y - 20$.
 - a) (3 p.) Sa se arate ca legea "*" este asociativa;
 - b) (3 p.) Sa se arate ca $x * 4 = x, \forall x \in \mathbf{R}$;
 - c) (4 p.) Sa se demonstreze ca multimea $(-\infty, 5)$ este parte stabila a lui \mathbf{R} in raport cu legea "*".
2. Se considera functia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^{2x}$
 - a) (5 p.) Sa se demonstreze, utilizand metoda inductiei matematice, ca $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}$;
 - b) (5 p.) Sa se calculeze:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(0) + f''(0) + \dots + f^{(n)}(0)}{2^n}$$

III. (20 puncte)

Se considera matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ si } I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Definim } B = A + I_4.$$

- a) (6 p.) Sa se calculeze determinantul si rangul matricei A;
- b) (3 p.) Sa se calculeze A^2 ;
- c) (3 p.) Sa se arate ca $B^2 = 2B - I_4$;
- d) (4 p.) Sa se demonstreze ca matricea B este inversabila si sa se calculeze inversa;
- e) (4 p.) Sa se calculeze $B^n, \forall n \geq 1$.

IV. (20 puncte)

Se defineste sirul $(I_n)_{n \geq 0}$ astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx \text{ si } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 6x + 10} dx, n \geq 1$$

- 1) (6 p.) Sa se calculeze I_0 si I_1 .
- 2) Sa se demonstreze ca:
 - a) (2 p.) $I_{n+2} + 6I_{n+1} + 10I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}$
 - b) (2 p.) $I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbf{N}$
 - c) (2 p.) $17I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \leq 17I_n, \forall n \geq 1$
 - d) (2 p.) $\frac{1}{17(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{17(n-1)}, \forall n \geq 2$.
- 3) (6 p.) Sa se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a \cdot I_n, a \in \mathbf{R}$.

Nota. Se acorda din oficiu 10 puncte.