

Bacalaureat 2001**Profilurile: matematica-fizica, informatica, metrologie****Sesiunea iunie****Subiectul I**

1. Se considera polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 5$
 - a) (6 p.) Sa se verifice ca $f = (X - 1)^2(X - 2)^2 + 1$
 - b) (2 p.) Sa se arate ca polinomul f nu are radacini reale.
 - c) (2 p.) Sa se demonstreze ca polinomul f nu se poate descompune in produs de doua polinoame neconstante cu coeficienti intregi.
2. Se considera functia $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$
 - a) (4 p.) Sa se calculeze $g'(x), x \in \mathbf{R}$
 - b) (2 p.) Sa se determine asimptotele la graficul functiei g .
 - c) (4 p.) Sa se calculeze $\int g(x)dx, x \in \mathbf{R}$
3. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A(6,0)$, $B(0,6)$ si $C(12, 12)$.
 - a) (3 p.) Sa se determine aria triunghiului ABC .
 - b) (4 p.) Sa se determine coordonatele punctului $M(u,v)$ astfel incat $MA = MB = MC$.
 - c) (3 p.) Sa se scrie ecuatia cercului care trece prin punctele A, B si C .

Subiectul II

1. Se considera polinoamele cu coeficienti in corpul \mathbf{Z}_3 , $f = X^3 + \hat{2}X$ si $g = X^5 + \hat{2}X$.
 - a) (3 p.) Sa se determine radacinile polinomului f .
 - b) (4 p.) Sa se determine catul si restul impartirii polinomului g la polinomul f .
 - c) (3 p.) Notam cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}_3$ radacinile polinomului f . Sa se calculeze $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ si $T = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.
2. Se considera functia $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, definita prin $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.
 - a) (4 p.) Sa se calculeze $f'(x)$.
 - b) (2 p.) Sa se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{\ln(n^2 + 1)}$
 - c) (2 p.) Sa se demonstreze ca functia f este bijectiva.
 - d) (2 p.) Notam cu g inversa functiei f . Sa se calculeze $g'(\ln 2)$.

Subiectul III

Se considera numerele reale distincte a, b, c, d , functiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, $g(x) = x^3 + x + 1$ si determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

a) (4 p.) Sa se verifice ca $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y), \forall x, y, z \in \mathbf{R}.$

b) (4 p.) Sa se arate ca $\Delta = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$

c) (4 p.) Sa se verifice ca $f'(a) = (a-b)(a-c)(a-d).$

d) (4 p.) Fie determinantul $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix}.$

Sa se arate ca $A = \Delta.$

e) (4 p.) Dezvoltand determinantul A dupa ultima linie, se se arate ca

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 1.$$

Subiectul IV

Se considera functia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$

a) (4 p.) Sa se calculeze $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x).$

b) (4 p.) Sa se calculeze $f'(0), f''(0), f'''(0), f^{(4)}(0).$

c) (3 p.) Sa se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5}.$

d) (3 p.) Sa se arate ca $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}.$

e) (3 p.) Sa se deduca inegalitatea $f(x) < 0, \forall x < 0.$

f) (3 p.) Se considera functia $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = e^{-x^2}.$ Sa se demonstreze ca aria suprafetei cuprinse intre graficul functiei g, axa Ox si dreptele de ecuatii $x=0$ si $x=1$ este un numar din intervalul $(0,74; 0,75).$