

Bac 2001
Varianta 2
Profil: mate-fizica, informatica, metrologie

Subiectul I (30 p)

1. Se considera matricele:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ si } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (3p) Sa se calculeze $XY - A$.
 - (4p) Sa se calculeze determinantul si rangul matricei A .
 - (3p) Sa se calculeze A^2 .
2. Se considera functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^3$.
- (4p) Sa se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
 - (4p) Sa se arate ca functia f este bijectiva.
 - (2p) Sa se arate ca exista un numar real unic c astfel incat $f(c) = c$.
3. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctele $A(1,1)$, $B(2,0)$, $C(3,-1)$ si dreapta $d: x - y = 0$.
- (4p) Sa se scrie ecuatia dreptei AB .
 - (3p) Sa se arate ca punctele A, B si C sunt coliniare.
 - (3p) Sa se calculeze distanta de la punctul C la dreapta d .

Subiectul II (20 p)

1. Se considera polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ cu radacinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ si $g = X^3 + X^2 + X + 1$ cu radacinile $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$.
- (4p) Sa se determine catul si restul impartirii polinomului f la polinomul g .
 - (3p) Sa se determine y_1, y_2, y_3 .
 - (2p) Sa se arate ca numarul $a = g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot g(x_3) \cdot g(x_4)$ este natural.
 - (1p) Sa se arate ca $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Se considera functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x + a^x - 4^x - 6^x$, unde $a \in \mathbb{R}, a > 0$.
- (4p) Sa se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
 - (2p) Sa se calculeze $f(0)$ si $f'(0)$.
 - (2p) Sa se determine $a > 0$ astfel incat $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) (2p) Pentru $a=8$, sa se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Subiectul III (20 p)

Se considera o functie $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ cu proprietatea:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

- a) (3p) Sa se arate ca $f(0) = 0$.
- b) (3p) Sa se arate ca $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$.
- c) (3p) Sa se demonstreze, utilizand metoda inductiei matematice, ca:
 $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ si $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$
- d) (3p) Sa se deduca egalitatea $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- e) (3p) Notam $a = f(1), a \in \mathbb{Q}$. Sa se arate ca $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Q}$.
- f) (3p) Sa se demonstreze ca daca $(H, +)$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}, +)$ si este izomorf cu $(\mathbb{Q}, +)$, atunci $H = \mathbb{Q}$.

Subiectul IV (20 p)

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cos \frac{p}{x} \text{ si}$$

Se considera functiile

$$g: \left[0, \frac{p}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos x + x \sin x$$

- a) (3p) Sa se calculeze $g'(x), x \in \left[0, \frac{p}{2}\right]$.
- b) (3p) Sa se calculeze $f'(x), x \in (0, \infty)$.
- c) (2p) Sa se verifice ca $g'(x) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$.
- d) (3p) Sa se arate ca $g(x) > 1, \forall x \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$.
- e) (3p) Utilizand teorema lui Lagrange pentru functia f , sa se demonstreze inegalitatea $f(x+1) - f(x) > 1, \forall x > 2$.
- f) (3p) Sa se arate ca $f(n) > n - 2, \forall n \geq 3$.
- g) (3p) Sa se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n^2}$.

Indicatii de rezolvare (la exercitiile mai dificile)

Subiectul I

2c) Se considera functia auxiliara $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j(x) = f(x) - x$. Avem $j'(x) = f'(x) - 1 = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci j este strict descrescatoare pe \mathbb{R} . Limitele la $-\infty$ si $+\infty$ sunt egale cu $+\infty$, respectiv $-\infty$. Functia j este continua, deci are proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} . Exista asadar un $c \in \mathbb{R}$ astfel

incat $j(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Unicitatea lui c este asigurata de injectivitatea functiei j .

Subiectul II

1c) Fie $a \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ una din radacinile polinomului f . Avem:

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a^4 + g(a) = 0 \Leftrightarrow g(a) = -a^4$$

Inlocuind succesiv pe a cu x_1, x_2, x_3, x_4 si efectuand produsul, obtinem:

$$a = g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot g(x_3) \cdot g(x_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4)^4 = 1 \in \mathbb{N}$$

1d) Solutie de clasa a VIII-a. Consideram mai multe cazuri.

i) $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \geq 1 > 0$.

ii) $x \in (-1; 0)$. Scriem $f(x) = x^4 + (x+1)(x^2+1)$. Dar

$$x^4 > 0, x+1 > 0, x^2+1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

iii) $x \leq -1$. Se scrie $f(x) = 1 + (x^2+x)(x^2+1)$ si avem

$$x^2+x \geq 0, x^2+1 > 0 \Rightarrow f(x) \geq 1 > 0.$$

2c) Cum $f(0) = 0$, rezulta ca $f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 0$ este punct de minim pentru f . Functia f fiind derivabila pe \mathbb{R} , rezulta $f'(0) = 0$ (teorema lui Fermat). Dar $f'(0) = \ln \frac{a}{8} \Rightarrow \ln \frac{a}{8} = 0 \Rightarrow a = 8$. Rezulta:

$$f(x) = 3^x - 6^x + 8^x - 4^x = (2^x - 1)(4^x - 3^x) = 3^x (2^x - 1) \left(\left(\frac{4}{3} \right)^x - 1 \right)$$

Pentru $x \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 1, \left(\frac{4}{3} \right)^x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 0$; pentru $x < 0$ avem

$$2^x < 1, \left(\frac{4}{3} \right)^x < 1 \Rightarrow f(x) > 0. \text{ Rezulta } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Subiectul III

e) Inlocuind $x = 1$ in egalitatea de la punctul d), avem $f(n) = nf(1) = an, n \in \mathbb{N}$.

In aceeasi egalitate, se inlocuieste:

$$x = \frac{1}{n} \Rightarrow f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n} = \frac{a}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

Rezulta $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{ma}{n}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $x = -\frac{m}{n}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$, rezulta (utilizand punctul b)) ca

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{m}{n}\right) = -\frac{ma}{n}.$$

In concluzie, $\forall x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ avem $f(x) = \frac{ma}{n} = \frac{m}{n}a = ax$

f) Avem $H \subset \mathbb{Q}$ si $(H, +) \simeq (\mathbb{Q}, +)$, deci exista un morfism bijectiv $f: \mathbb{Q} \rightarrow H$ astfel incat $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$. Conform punctului e), rezulta $f(x) = ax, a \in \mathbb{Q}$. Daca $a = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f$ neinjectiva. Deci $a \neq 0$; in acest caz insa, $\forall y_0 \in \mathbb{Q}, \exists x_0 = \frac{y_0}{a} \in \mathbb{Q}$ astfel incat:

$$f(x_0) = a \cdot \frac{y_0}{a} = y_0 \Rightarrow f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q} \subset H \Rightarrow H = \mathbb{Q}.$$

Subiectul IV

e) Se aplica teorema lui Lagrange functiei f pe intervalul $[x, x+1]$:

$$\exists c_x \in (x; x+1) \text{ astfel incat } f'(c_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x}$$

Dar $f'(x) = \cos \frac{p}{x} - \frac{p}{x} \sin \frac{p}{x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Rezulta:

$$\cos \frac{p}{c_x} - \frac{p}{c_x} \sin \frac{p}{c_x} = f(x+1) - f(x)$$

Cum $x > 2 \Rightarrow c_x > 2 \Rightarrow \frac{p}{c_x} \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$. Putem inlocui deci $x \rightarrow \frac{p}{c_x}$ in inegalitatea de la punctul d), rezultand $f(x+1) - f(x) > 1, \forall x > 2$.

f) Avem $f(2) = 2 \cos \frac{p}{2} = 0$. Se scrie inegalitatea de la punctul d) succesiv pentru $x = 2, 3, \dots, n-1$:

$$f(3) > 1 + f(2)$$

$$f(4) > 1 + f(3) > 2 + f(2)$$

...

$$f(n) > 1 + f(n-1) > 2 + f(n-2) > \dots > n-2 + f(2) = n-2$$

g) Suma de la numarator $\sum_{k=1}^n f(k)$ nu "iese" printr-o formula analitica simpla. Singura posibilitate este de a utiliza teorema Cesaro-Stolz pentru sirurile:

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k), b_n = n^2$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cos \frac{p}{n}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{p}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rezulta } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Observatie. Din cate cunoastem, manualul scolar in vigoare intre 1979 si 2000 nu include teorema Cesaro-Stolz. Este posibil ca aceasta sa fie insa inclusa in programa claselor de mate-fizica si informatica. Nu ne mai intrebam de ce s-au retiparit atatia ani manuale neconforme cu programa; doar traim in Romania si ne putem astepta la orice.