

Bac 2001
Varianta 1
Profil: mate-fizica, informatica, metrologie

Subiectul I (30 p)

1. a) (5 p) Sa se verifice identitatea:
$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

b) (3 p) Sa se arate ca daca $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, x, y, z \in \mathbb{R}$ atunci $x = y = z$.
c) (2 p) Sa se rezolve ecuatia $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x, x \in \mathbb{R}$.
2. Se considera functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)e^{-x}$
 - a) (4 p) Sa se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
 - b) (2 p) Sa se studieze semnul functiei f' .
 - c) (2 p) Sa se arate ca $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - d) (2 p) Sa se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
3. In sistemul cartezian de coordonate xOy se considera punctul $A(1,1)$ si dreapta $d: 5x + 12y + 9 = 0$.
 - a) (4 p) Sa se calculeze distanta de la punctul A la dreapta d .
 - b) (4 p) Sa se scrie ecuatia cercului C cu centrul in A si care este tangent dreptei d .
 - c) (2 p) Sa se scrie ecuatia dreptei care trece prin A si este perpendiculara pe dreapta d .

Subiectul II (20 p)

1. In inelul $\mathbb{Z}_6[X]$ se considera polinomul $f = X^3 - X$. Notam cu $A \subset \mathbb{Z}_6$ multimea radacinilor polinomului f .
 - a) (4 p) Sa se verifice ca $A = \mathbb{Z}_6$.
 - b) (2 p) Sa se gaseasca un polinom nenul $g \in \mathbb{Z}_6[X], g \neq \pm f$, care sa aiba mai multe radacini decat gradul sau. Notam cu $S_k = \hat{1}^k + \hat{2}^k + \hat{3}^k + \hat{4}^k + \hat{5}^k, k \in \mathbb{N}^*$.
 - c) (2 p) Sa se calculeze S_1 si S_2 .
 - d) (2 p) Sa se arate ca $S_k \in \{\hat{1}, \hat{3}\}, \forall k \in \mathbb{N}^*$
2. Se considera functiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
 - a) (5 p) Sa se verifice ca $f(x) = x - \frac{x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) (3 p) Sa se determine $F(x), x \in \mathbb{R}$.

c) (2 p) Sa se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{xf'(x)}$

Subiectul III (20 p)

Se considera multimea $G = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ pe care se defineste legea de compozitie " \circ " prin $(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) = (a_1 a_2, a_1 x_2 + x_1)$.

a) (4 p) Sa se arate ca

$$((a_1, x_1) \circ (a_2, x_2)) \circ (a_3, x_3) = (a_1, x_1) \circ ((a_2, x_2) \circ (a_3, x_3)),$$

$$\forall (a_1, x_1), (a_2, x_2), (a_3, x_3) \in G$$

b) (6 p) Sa se verifice ca $(a, x) \circ (1, 0) = (1, 0) \circ (a, x) = (a, x), \forall (a, x) \in G$.

c) (4 p) Sa se verifice ca:

$$(a, x) \circ \left(\frac{1}{a}, -\frac{x}{a} \right) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{x}{a} \right) \circ (a, x) = (1, 0), \forall (a, x) \in G$$

d) (2 p) Sa se gaseasca doua elemente (a_1, x_1) si (a_2, x_2) din multimea G pentru care $(a_1, x_1) \circ (a_2, x_2) \neq (a_2, x_2) \circ (a_1, x_1)$

e) (4 p) Sa se demonstreze ca $\forall (a, x) \in G$ si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ exista

$$(u, v) \in G \text{ astfel incat } \underbrace{(u, v) \circ (u, v) \circ \dots \circ (u, v)}_{n \text{ ori}} = (a, x)$$

Subiectul IV (20 p)

Se considera numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n si functiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \text{ si}$$

$$F(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{a_n}{n} \sin nx, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

a) (4 p) Sa se arate ca functia F este o primitiva a functiei f pe \mathbb{R} .

b) (3 p) Sa se verifice ca $F(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

c) (4 p) Sa se arate ca daca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ atunci $F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) (3 p) Sa se arate ca daca $F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ atunci $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Notam cu } J(p, q) = \int_0^{2p} \cos px \cos qx \, dx, p, q \in \mathbb{N}^*$$

e) (4 p) Utilizand formula:

$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b), \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\text{sa se arate ca } J(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{daca } p \neq q \\ p, & \text{daca } p = q \end{cases} \quad p, q \in \mathbb{N}^*$$

f) (2 p) Sa se demonstreze ca daca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ atunci

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Indicatii de rezolvare (la exercitiile ceva mai dificile)

Subiectul I.

1c) Notand $a = 2^x, b = 3^x, c = 5^x$, ecuatia devine:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Rightarrow a = b = c \Rightarrow 2^x = 3^x = 5^x \Rightarrow x = 0$$

Subiectul II.

1b) De exemplu, polinomul $g = X^2 - X \in \mathbb{Z}_6[X]$ are 4 radacini:

$$x_1 = \hat{0}, x_2 = \hat{1}, x_3 = \hat{3}, x_4 = \hat{4}.$$

1d) Se observa ca:

$$\hat{1}^k = \hat{1}, \hat{3}^k = \hat{3}, \hat{4}^k = \hat{4}, \hat{2}^k = \begin{cases} \hat{4}, & k \text{ par} \\ \hat{2}, & k \text{ impar} \end{cases}, \hat{5}^k = \begin{cases} \hat{1}, & k \text{ par} \\ \hat{5}, & k \text{ impar} \end{cases}.$$

$$\text{Rezulta } S_k = \begin{cases} \hat{1} + \hat{4} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{1} = \hat{1}, & k \text{ par} \\ \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = \hat{3}, & k \text{ impar} \end{cases}$$

2c) Avem de calculat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \ln(x^2 + 1)}{\frac{2x^4}{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \ln(x^2 + 1)}{\frac{x^2}{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2} \left(1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} \right)$$

Limita din paranteza se evalueaza cu ajutorul regulii lui l'Hospital si da

0. Rezulta $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{2}$

Subiectul III.

d) De exemplu, $(1, 2) \circ (3, 4) \neq (3, 4) \circ (1, 2)$

e) Pentru $n = 1$, luam $(u, v) = (a, x)$. Fie in continuare $n \geq 2$.

Se calculeaza succesiv:

$$(u, v) \circ (u, v) = (u^2, uv + v)$$

$$(u^2, uv + v) \circ (u, v) = (u^3, u^2v + uv + v)$$

Se demonstreaza (inductie) ca:

$$\underbrace{(u, v) \circ (u, v) \circ \dots \circ (u, v)}_{n \text{ ori}} = (u^n, v(u^{n-1} + u^{n-2} + \dots + u + 1))$$

$$\text{Rezulta } \begin{cases} u^n = a \\ v(u^{n-1} + u^{n-2} + \dots + u + 1) = x \end{cases}$$

Ecuatia $u^n = a$ are in $(0, \infty)$ solutia unica $u = \sqrt[n]{a}$. Cat priveste a doua ecuatie, avem doua cazuri:

i) $u \neq 1 \Leftrightarrow a \neq 1$. Ecuatia devine: $v \cdot \frac{u^n - 1}{u - 1} = x \Rightarrow v = \frac{x(u - 1)}{u^n - 1} = \frac{x(\sqrt[n]{a} - 1)}{a - 1}$

ii) $u = 1 \Leftrightarrow a = 1$. Rezulta $nv = x \Rightarrow v = \frac{x}{n}$. Avem in concluzie:

$$(u, v) = \begin{cases} \left(\sqrt[n]{a}, \frac{x(\sqrt[n]{a}-1)}{a-1} \right) & \text{daca } a \neq 1 \\ \left(1, \frac{x}{n} \right) & \text{daca } a = 1 \end{cases}$$

Subiectul IV

c) Daca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este crescatoare pe \mathbf{R} . Pe un interval de forma $[kp, (k+1)p]$ avem $F(kp) = F((k+1)p) = 0$. Presupunem ca F ia undeva in interiorul intervalului o valoare nenula (de fapt, strict pozitiva):

$$F(x_0) = a > 0, x_0 \in (kp, (k+1)p)$$

Cum F este crescatoare pe \mathbf{R} , va fi crescatoare si pe intervalul $[kp, (k+1)p]$. Rezulta $0 = F((k+1)p) \geq F(x_0) = a$, contradictie. Rezulta $F(x) = 0, \forall x \in [kp, (k+1)p] \Rightarrow F(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

f) Conform punctelor c) si d), din $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ rezulta $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tinand cont de expresia analitica a functiei f , rezulta:

$$\sum_{k=1}^n a_k \cos kx = 0 \quad (*)$$

Relatia (*) se inmulteste pe rand cu $\cos ix, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ si rezulta:

$$\sum_{k=1}^n a_k \cos kx \cos ix = 0$$

Aceasta se integreaza intre 0 si $2p$:

$$\int_0^{2p} \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \cos ix \, dx = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \cdot \int_0^{2p} \cos kx \cos ix \, dx = 0 \quad (**)$$

Pe de alta parte, tinem cont de punctul e), care ne spune ca:

$$\int_0^{2p} \cos kx \cos ix \, dx = \begin{cases} 0, & \text{daca } i \neq k \\ p, & \text{daca } i = k \end{cases}$$

Rezulta din relatia (**) ca $pa_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, i = \overline{1, n}$.