

### Model de test pentru Bacalaureat 2006

Programa M1. Proba D. Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică,  
Filiera Vocațională, profil Militar, specializarea matematică-informatică

#### SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine valoarea celui mai mare element din șirul  $\sin \pi$ ,  $\sin \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{3}$ ,  $\dots$ ,  $\sin \frac{\pi}{10}$ .
- (4p) b) Să se determine ecuația planului care trece prin punctele  $A(1, 1, 0)$ ;  $B(1, 0, 1)$  și  $C(0, 1, 1)$ .
- (4p) c) Să se calculeze volumul tetraedrului  $ABCD$ , unde  $A(1, 1, 0)$ ;  $B(1, 0, 1)$ ;  $C(0, 1, 1)$  și  $D(1, 1, 1)$ .
- (4p) d) Să se determine  $a > 0$ , dacă punctul  $A(a, 1)$  este situat pe elipsa  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria unui triunghi cu laturile de 7, 8 și 9.
- (2p) f) Să se calculeze  $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$ .

#### SUBIECTUL II (30p)

- (3p) 1. a) Să se determine câte subgrupuri are grupul  $(\mathbb{Z}_4, +)$ .
- (3p) b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x = \frac{1}{2}$ .
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element din inelul  $\mathbb{Z}_8$ , să fie inversabil față de înmulțire.
- (3p) d) Dacă funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este  $f(x) = 2x - 1$ , să se calculeze  $f(1) + f(2) + \dots + f(2005)$ .
- (3p) e) Dacă funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este  $f(x) = x^2 + 2x$ , să se calculeze  $(f \circ f)(1)$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2005^x$ .
- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se determine  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se determine  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) d) Să se calculeze numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze numărul punctelor de extrem local ale funcției  $f$ .

### SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Spunem că matricea  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  este *nilpotentă*, dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $M^n = O_2$ .

- (4p) a) Să se verifice că matricele  $O_2$  și  $J$  sunt *nilpotente*.
- (4p) b) Să se arate că matricea  $K$  nu este nici inversabilă, nici *nilpotentă*.
- (4p) c) Să se arate că, dacă matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , este  $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ , atunci avem identitatea  $X^2 - (p + s)X + (ps - rq)I_2 = O_2$ .
- (2p) d) Să se arate că, dacă matricea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  verifică relația  $A^2 = O_2$ , atunci  $a + d = 0$  și  $ad - bc = 0$ .
- (2p) e) Să se arate că, dacă matricea  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  este *nilpotentă*, atunci  $B^2 = O_2$ .
- (2p) f) Să se arate că, dacă matricea  $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  este *nilpotentă*,  $C \neq O_2$ , atunci matricea  $C$  are rangul 1.
- (2p) g) Să se arate că matricea  $I_2$  nu poate fi scrisă ca o sumă finită de matrice *nilpotente*.

### SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 + \{x\}(1 - \{x\})$  și  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ . Prin  $\{x\}$  am notat partea fracționară a numărului real  $x$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $f(x + 1) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x = 1$ .
- (2p) c) Să se verifice că  $F(x) = 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ ,  $\forall x \in [0, 1)$ .
- (4p) d) Să se arate că  $3 \leq f(x) \leq 4$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- (2p) e) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ .
- (2p) g) Să se arate că există  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcția  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G(x) = F(x) - ax$  să fie periodică, având o perioadă egală cu 1.